Tarikh No.

1.2.

Gaussian Elimination and Gauss-Jordan Elimination

Matrix $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{bmatrix}$ ← Rows m

↑ ↑ ↑ Columns n

Size of the matrix = $m \times n$

$A_{m \times n} = A_{3 \times 3}$ ↓

$B_{3 \times 1} = B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ ← ← ←

$m = n$ المصفوفة المربعة

$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \downarrow & \downarrow \\ \rightarrow & \\ \rightarrow & \end{bmatrix}$ square matrix of order (2)

a_{11} , a_{22} , a_{33} .... main diagonal

Powered by CamScanner

Tarikh No.

Ex1 Page 15

$[2] = 1 \times 1$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \times 2$

$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 1 \times 4$

$\begin{bmatrix} e & \pi \\ 2 & \sqrt{2} \\ -7 & 4 \end{bmatrix} = 3 \times 2$

↘ Augmented matrix

$2x + 3y = 1$

$5x - 4y = 3$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ (x ↓ y ↓ | ↓ ; ← ←)

↘ Coefficient matrix مصفوفة المعاملات

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$

Powered by CamScanner

Tarikh No.

* write the augmented matrix of the following system of equations

$$\begin{aligned} x - 4y + 3z &= 5 \\ -x + 3y - z &= -3 \\ 2x \quad\quad - 4z &= 6 \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

→ Row operations

عمليات تجرى على الصفوف بدون اي تغيير على خصوفه

① تبديل الصفوف

$$\begin{matrix} R_1 \rightarrow \\ R_2 \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

② ضرب اي متجه الصف بعدد ثابت

kR_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{5R_1} \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Powered by CamScanner

Tarikh No.

③ جمع او طرح صفين بعد ضرب احدهما بعدد

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{5R_1 + R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3R_1 + R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrr} -3R & -3 & -6 \\ & 3 & -1 \\ \hline & 0 & -7 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}R_1} \text{نقسم الصف الاول على 3}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

✓ لتحويل اي عنصر بالصفوف الى ① نقسم الصف على العدد

✓ لتحويل اي عنصر بالصفوف الى ⓪ نجمع الصف مع صف اخر يحوي على نظير العنصر

Tarikh No.

Ex 2 Page 16

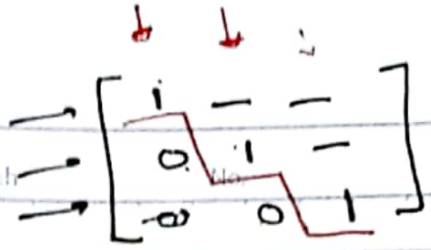
(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1 + R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 13 & -8 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{cccc} -2 & -4 & 8 & -6 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \\ \hline 0 & -3 & 13 & -8 \end{array}$$

Powered by CamScanner



Ex 3 Page 17

solve

$$+x + 2y + 3z = 9$$
$$-x + 3y = -4$$
$$2x - 5y + 5z = 17$$

① نحول المعادلات الى مصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

② نحول المعادله الى الشكل الدرجي (نبدأ بالعمود الاول)

$R_1 + R_2 \to R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

0 1 3 5

$-2R_1 + R_3 \to R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} -2 & 4 & -6 & -18 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}$$

③ نبدأ بالعمود الثاني

$R_2 + R_3 \to R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Powered by CamScanner

Tarikh No.

③ نبدأ بالعمود الثالث

$$\begin{bmatrix} +1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

نقسم الصف الثالث على 2

$$\frac{R_3}{2} \rightarrow R_3 \qquad \begin{matrix} x & y & z \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

④ نرجع الصفوف اى معادلات ونستخدم طريقة التعويض العكسي للحل

$$x - 2y + 3z = 9$$
$$y + 3z = 5$$
$$z = 2$$

$\boxed{z = 2}$

$y + 3(2) = 5$

$y = 5 - 6$

$\boxed{y = -1}$

$x - 2(-1) + 3(2) = 9$

$x = 9 - 8$

$\boxed{x = 1}$

Powered by CamScanner

Tarikh No.

Row - Echelon form (REF)

الشكل الدرجي للمصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

REF

① كل صف يبدأ بـ رقم (1) (leading 1)

② تحت leading 1 يجب ان يكون اصفار

③ لكل صفين متتابعين في الصف العلوي يكون leading 1 على اليمين

Reduced (REF)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ليس فقط اسفل leading 1 اصفار واعلا ايضاً

اكد منه

Ex4 18

Powered by CamScanner

Tarikh No.

Gaussran Elimination with back subsitution

① نحول المعادلات الى مصفوفة

② نحول المصفوفه الى REF باستخدام العمليات

③ نرجع المصفوفه الى معادلات ونحلها بطريقة التعويض العكسي

Ex

* Solve the system of equations using Caussran elimination

① $x + 2y = 7$
$2x + y = 8$ $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

② نحول 2 الى صفر

$\xrightarrow{-2R_1 + R_2 \to R_2}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & - & - \\ 0 & 1 & - \end{bmatrix}$

$-3 \div -3 = 1$

$$\begin{array}{r} -2 \quad -4 \quad -14 \\ 2 \quad 1 \quad 8 \\ \hline 0 \quad -3 \quad -6 \end{array}$$

نحول 3- الى 1 بالقسمة على 3-

$\xrightarrow{\frac{R_2}{-3} \to R_2}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Powered by CamScanner

$$\begin{bmatrix} 1 & - & - & - & - \\ 0 & 1 & - & - & - \\ 0 & 0 & 1 & - & - \\ 0 & 0 & 0 & 1 & - \end{bmatrix}$$

EX 5

19

Solve the system

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 &= -2 \\ x_1 - 4x_2 - 7x_3 - x_4 &= -19 \end{aligned}$$

① حول المعادلات الى مصفوفة

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{bmatrix}$$

② حول المصفوفة الى REF

$R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{bmatrix}$$

$-2R_1 + R_3 \rightarrow R_3$

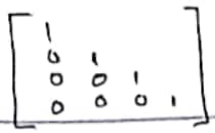
$$\begin{array}{ccccc} -2 & -4 & +2 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$-R_1 + R_4 \rightarrow R_4$

$$\begin{array}{ccccc} -1 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{array}$$

Powered by CamScanner



Tarikh No.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & -21 \end{bmatrix}$$

$6R_2 + R_4 \longrightarrow R_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & (3) & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -39 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 6 & 6 & -12 & -18 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & -21 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -13 & -39 \end{array}$$

$\frac{R_3}{3} \longrightarrow R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -39 \end{bmatrix}$$

$\frac{R_4}{-13} \longrightarrow R_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

REF

③ نرجع ماتریس کو صفر فارم کی صورت میں

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
$$x_2 + x_3 - 2x_4 = -3$$
$$x_3 - x_4 = -2$$
$$x_4 = 3$$

$x_4 = 3$

$x_3 - 3 = -2$

$x_3 = 1$

$x_2 + 1 - 2(3) = -3$

$x_2 = 2$

$x_1 + 2(2) - 1 = 2$

$x_1 = -1$

Powered by CamScanner

Tarikh No.

Gaussian Elimination

خطوات

① تحويل المعادلات الى مصفوفه

② تحويل المصفوفه الى REF

③ تحويل المصفوفه الى معادلات وحل بطريقة التعويض العكسي

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$0 = 6$

No solution

Ex 6 Page 21

Solve

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$
$$x_1 + x_3 = 6$$
$$2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 4$$
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2R_1+R_3\to R_3]{-R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3R_1+R_4\to R_4}$$

-1	+1	-2	-4
1	0	1	6
0	1	-1	2
-2	2	-4	-8
2	-3	5	4
0	-1	1	-4

$$\xrightarrow{R_2+R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \end{bmatrix}$$

No Solution

inconsistent

Tarikh No.

Gauss - Jordan Elimination

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & \textcircled{1} & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \approx\!\!\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

G-J E هل المعادلات بطريقة

① تحويل المعادلات الى مصفوفه

② تحويل المصفوفه الى RREF

③ تحويل المصفوفه الى معادلة

مثال

Solve

$$x + 2y = 7$$
$$2x + y = 8$$

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$-2R_1 + R_2 \rightarrow R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$\frac{R_2}{3} \rightarrow R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & \textcircled{2} & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$-2R_2 + R_1 \rightarrow R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad x = 3 \quad y = 2$$

Powered by CamScanner

Tarikh No.

Ex 7 (22)

$$x - 2y + 3z = 9$$
$$-x + 3y = -4$$
$$2x - 5y + 5z = 17$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

REF الى 3 تم تحويلها في مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_2 + R_1 \to R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3R_3 + R_2 \to R_2} \xrightarrow{-9R_3 + R_1 \to R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$x = 1$
$y = -1$
$z = 2$

0	2	6	10
1	-2	3	9
1	0	9	19

0	0	-3	-6
0	1	3	5
0		0	-1

	-9	-18
	9	19
0	0	1

Powered by CamScanner

Ex 8

Solve the system of equation

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$$
$$3x_1 + 5x_2 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{2}R_1 \to R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$-3R_1 + R_2 \to R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$-R_2 \to R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$-2R_2 + R_1 \to R_1$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 5x_3 = 2$$
$$x_2 - 3x_3 = -1$$

$x_3 = t$ any real number

$x_2 - 3t = -1$

$x_2 = -1 + 3t$

$x_1 + 5t = 2$

$x_1 = 2 - 5t$

Powered by CamScanner

Eg 9 (25)

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$-2R_1 + R_2 \to R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{3}R_2 \to R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 + R_1 \to R_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_3 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

$x_3 = t$

$x_2 - t = 0$

$x_2 = t$

$x_1 + 2t = 0$

$x_1 = 2t$

Powered by CamScanner