فيزياء رياضية (3)

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية

* رتبة ثانية :- أعلى مشتقة في المعادلة تكون المشتقة

$$y'' \qquad \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$y'''(x) + 2y'' + 3y = 0$$ رتبة ثالثة

$$y'' + 2xy = 5$$ رتبة ثانية

* معادلة خطية

$$P(x)\, y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = R(x)$$

معاملات بدلالة x
او ثوابت

$$y'' + 2y' + xy = 0$$ خطية

$$y''^2 + \frac{1}{x} y' + y = e^y$$ غير خطية

$$x^2 y'' + 3xy = 0$$ خطية

عند حل المعادلة $\boxed{\text{الخطية}}$ من الرتبة الثانية يكون لها حلان

$$\overbrace{y_1 \qquad\qquad y_2}$$

في حالة المعادلة الخطية يكون الحل العام

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

* المعادلة الخطية من الدرجة الثانية تحتوي فقط على y ومشتقاتها y y' y'' بدون أن ترفع لأي أس ولا جذر وتكون معاملات y ومشتقاتها دوال لـ (x)

* هل المعادلة التالية خطية

$$y'' + \frac{1}{y} y' + y = 0$$

ليست معادلة خطية ضرب y^{-1} مضروبة بـ y'

HDE معادلة متجانسة

$$f(x) y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0$$

Non-HDE معادلة غير متجانسة

$$F(x) y'' + P(x) y' + Q(x) y = R(x)$$

اثبت ان المعادله المتجانسة هي خطية

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad \text{-------} \circledast$$

الحل العام للمعادله الخطيه

$$y = c_1 \underline{y_1} + c_2 \underline{y_2}$$

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

$$y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2''$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

نعوض الحلين في المعادلة

$$(c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + P(x)(c_1 y_1' + c_2 y_2') + Q(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) \overset{?}{=} 0$$

$$c_1 \underline{(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1)} + c_2 \underline{(y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2)} \overset{?}{=} 0$$

y_1 هي حل للمعادله اذا الاجابه 0

y_2 هي حل للمعادله اذا الاجابه = 0

$$c_1(0) + c_2(0) \overset{?}{=} 0$$

$$0 = 0$$

المعادله المتجانسه هي معادله خطيه

Ordinary المعادله التفاضليه الاعتياديه

ODE

$y(x)$ $\frac{dy}{dx}$ اعتياديه

$y(x,t)$ $\frac{dy}{dx}$ $\frac{dy}{dt}$ غيراعتيادية

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 5$$ ODE اعتياديه

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$ PDE جزئيه

عكن كتابه المعادله التفاضليه بؤتيه المؤثرات

$$\hat{D}(x) = \frac{d^2}{dx^2} + P(x)\frac{d}{dx} + Q(x)$$

$$\hat{D}(x)\,y = \underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}_{y''} + P(x)\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} + Q(x)\underbrace{y}_{y} = 0$$

$$\hat{D}(x)\,y = 0$$

حل المعادله بطريقه المؤثرات

$$\hat{D}(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1\hat{D}y_1 + c_2\hat{D}y_2$$

$$f_2(x)\, y'' + f_1(x)\, y' + f_0(x)\, y = \lambda y \quad --- (**)$$

لتحويل المعادله للشكل العام نقسم كل
المعادله على $f_2(x)$

$$y'' + \frac{f_1}{f_2} y' + \frac{f_0 - \lambda}{f_2} y$$

$$y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = 0 \quad --- (*)$$

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = P(x) \qquad Q_x = \frac{f_0(x) - \lambda}{f(x)}$$

ممكن كتابه المعادله بصيغه اخرى

$$f_2 \frac{d^2y}{dx^2} + f_1 \frac{dy}{dx} + f_0\, y = \lambda$$

$$\hat{L}(x) = f_2 \frac{d^2}{dx} + f_1 \frac{d}{dx} + f_0$$

$$\hat{L}(x)\, y = \lambda y$$

في حال كانت قيمه λ قيمه ثابته تسمى هذه
المعادلة eigenvalue equ

متجانسة

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

* غير متجانسة

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

حل هذه المعادلة تكون على خطوتين

1- حل المعادلة وكأنها معادلة متجانسة

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

2- حل المعادلة بوجود $f(x)$

y_p = particular soulution

الحل العام تكون ناتج عن جمع الحلين

$$\boxed{y = y_h + y_p}$$

4

لاثبات ان y يعتبر حل المعادلة :- نعوضه في المعادلة

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

$$(y_h+y_p)'' + P(x)(y_h+y_p)' + Q(x)(y_h+y_p) \overset{?}{=} f(x)$$

$$y_h'' + y_p'' + P(x)y_h' + P(x)y_p' + Q(x)y_h + Q(x)y_p = f(x)$$

$$(\underbrace{y_h'' + P(x)y_h' + Q(x)y_h}_{0}) + (y_p'' + P(x)y_p'' + Q(x)y_p) = f(x)$$

$$y_p'' + P(x)y_p'' + Q(x)y_p = f(x)$$

$y = y_h + y_p$ الحل العام

انطبق و يعتبر حلا للمعادلة

Singular Point نقاط التزد

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

عندما يتباعد فيه كل من $P(x)$ و $Q(x)$

$Q(x) \to \infty$ $P(x) \to \infty$

ندرس كله $P(x)$ و $Q(x)$

* مثال $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

نقسم الحدود على $1-x^2$

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0$$

$P(x) \to \infty$ عندما يكون المقام 0 $P(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$

$x^2 = 1$ $1-x^2=0$

$x = +1 , -1$

$Q(x) = \frac{2}{1-x^2}$ $x = +1 , -1$

نقاط التعزد $= \pm 1$

انواع نقاط التفرد

(non-essential) regular — ١- نقاط تفرد منتظمة

① $\lim_{x \to x_0} (x-x_0) p(x) =$ قيمة محددة (متقارب)

② $\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^2 Q(x) =$ قيمة محددة (متقاربة)

irregular — 2- نقاط تفرد غير منتظمة (شاذة)

اذا لم ينطبق الشرطين السابقين

ما نوع نقاط التفرد في المثال السابق

$\boxed{x=1}$

① $\lim_{x \to 1} (x-1) \dfrac{-2x}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \cancel{(x-1)} \dfrac{(-2)x}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$

$= \dfrac{-2}{2} = -1 \neq \infty$ قيمة محددة

② $\lim_{x \to 1} (x-1)^2 \dfrac{2}{1-x^2} = \lim_{x \to 1} (x-1)^{\cancel{2}} \dfrac{-2}{\cancel{(1-x)}(1+x)}$

$= \dfrac{(-2)0}{2} = 0 \neq \infty$ قيمة محددة

نقطة التفرد $x=1$ تعتبر نقطة تفرد منتظمة

مثال صفحة 7

في المعادله التفاضليه التاليه اوجد نقاط التوزد وانواعها

$$x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0$$

نقسم المعادله على x^2

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\frac{x^2-n^2}{x^2}\right)y = 0$$

$P(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $Q(x) = \frac{x^2-n^2}{x^2}$

نبحث عن اصفار المقام

$P(x) \Rightarrow x=0 \quad P(x) \Rightarrow \infty$

$Q(x) \Rightarrow x=0 \quad Q(x) \Rightarrow \infty$

هناك نقطة تفرد $\boxed{x=0}$

ما نوع نقطة التفرد

شرط الاول

① $\lim\limits_{x \to x_0} (x-x_0)P(x) =$ متقاربة

$\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \frac{1}{x} = 1$ متقاربة

تربيع ثاني

(2) $\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \, Q(x) =$ متقاربة

$$\lim_{x \to 0} \cancel{x^2} \left(\frac{x^2 - n^2}{\cancel{x^2}} \right) = -n^2 \quad \text{متقاربة}$$

$x = 0$ هي نقطة تفرد منتظمة

طريقة اخرى لنتعرف على نقاط التفرد

نفرض $\frac{1}{x} = z$ ويكون المعادلة بدلالة z ونبحث

عندما $z \to \infty$

$x \to 0 \qquad z \to \infty$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0$$

$-\frac{1}{z^2}$

$z = \frac{1}{x} \qquad x = \frac{1}{z} \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz}$

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{dy}{dx}\frac{1}{z^2}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -z^2 \frac{dy}{dz}}$$

$z = \frac{1}{x}$

$\frac{dz}{dx} = \frac{-1}{x^2} = -z^2$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -z^2 \frac{dy}{dx}\frac{dy}{dz} - 2z\frac{dz}{dx}\frac{dy}{dz}$$

$$= -z^2(-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - 2z(-z^2)\frac{dy}{dz}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = z^4\frac{d^2y}{dz^2} + 2z^3\frac{dy}{dz}}$$

نعوض المشتقه الاولى والثانيه في المعادله الاصليه

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0$$

$$z^4\frac{d^2y}{dz^2} + 2z^3\frac{dy}{dz} + P\left(\frac{1}{z}\right)\left(-z^2\frac{dy}{dz}\right) + Q\left(\frac{1}{z}\right)y = 0$$

نرتب المعادله ونقسم على معامل $\frac{d^2y}{dz}$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{2z^3 - P(z^{-1})z^2}{z^4}\frac{dy}{dz} + \frac{Q(z^{-1})}{z^4}y = 0$$

$\tilde{P}(z)$ $\tilde{Q}(z)$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{2z - P(z^{-1})}{z^2}\frac{dy}{dz} + \frac{Q(z^{-1})}{z^4}y = 0}$$

للبحث عن نقاط التفرد نختبر $z \to 0$

اعادة حل مثال صفحة 7 باستخدام

تبديل z بـ x

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$$

$z=\frac{1}{x}$

نقسم على x^2

$$y''+\frac{1}{x}y'+\frac{(x^2-n^2)}{x^2}y=0$$

$$P(z^{-1})=z \qquad Q(z^{-1})=\frac{\frac{1}{z^2}-n^2}{\frac{1}{z^2}}$$

$$=1-z^2n^2$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{2z-P(z^{-1})}{z^2}\frac{dy}{dz}+\frac{Q(z^{-1})}{z^4}y=0$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{2z-z}{z^2}\frac{dy}{dz}+\frac{1-z^2n^2}{z^4}y=0$$

$$\frac{d^2y}{dz}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\frac{1-z^2n^2}{z^2}y$$

عندما $z=0$ $P(x)$ تساوي ∞ متباعدة

عندما $z=0$ $Q(x)$ تساوي ∞ متباعدة

هناك نقطة تفرد واحدة $x=0$

نبحث عن نوع نقطة التفرد

① $\lim_{z\to 0} z\,\tilde{P}(z)$ محدود $=0$

② $\lim_{z\to 0} z^2\,\tilde{Q}(z)$ محدودة

نهاية صفحة 8 واجب منزلي

اوجد جميع نقاط التفرد للمعادلة التفاضلية وما نوعها

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

نقسم المعادلة على $1-x^2$

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} + \frac{n(n+1)}{1-x^2}y = 0$$

نبحث عن اصفار المقام التي تجعل $P(x)$ و $Q(x)$ غير معرفة

$1-x^2=0 \qquad x^2=\pm 1$

هناك نقطتين تفرد -1 و $x=+1$

* نبدأ بالنقطة الاولى $\boxed{x=1}$

① $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)P(x) =$ محددة

$$\lim_{x\to 1} -(x-1)\frac{2x}{1-x^2} = \cancel{-}\cancel{(x-1)}\frac{2x}{\cancel{(1-x)}(1+x)}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x}{1+x} = \frac{2}{2} = 1$$

محددة

(2) $$\lim_{x\to x_0} (x-x_0)^2\, Q(x) = \text{محددة}$$

$$\lim_{x\to 1} (x-1)^{\cancel{2}} \frac{n(n+1)}{\cancel{(1-x)}(1+x)}$$

$$(0)\ \frac{n(n+1)}{2} = 0 \quad \text{محددة}$$

تعتبر $x=1$ نقطة تفرد منتظمة

عندما $x=-1$

$$\lim_{x\to -1} -(x+1)\frac{2x}{1-x^2} = -\cancel{(x+1)}\frac{2x}{\cancel{(1+x)}(1-x)}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{-2x}{1-x} = \frac{2}{2} = 1$$

محددة

$$\lim_{x\to x_0} (x-x_0)^2\, Q(x) = \text{محددة}$$

zero

$$\lim_{x\to -1} (x+1)^{\cancel{2}} \frac{n(n+1)}{\cancel{(1+x)}(1-x)} = (-1+1)\frac{n(n+1)}{2} = 0 \quad \text{محددة}$$

تعتبر نقطة $x=-1$ نقطة تفرد منتظمة

Power Series

متسلسلات القوى

Series Expansions You Should Know				
e^x	$=$	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$
$\cos x$	$=$	$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\dots$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\sin x$	$=$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\cosh x$	$=$	$1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\dots$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\sinh x$	$=$	$x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\frac{1}{1-x}$	$=$	$1+x+x^2+x^3+\dots$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$
$\frac{1}{1+x}$	$=$	$1-x+x^2-x^3+\dots$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$
$\tan^{-1}x$	$=$	$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
$\ln(1+x)$	$=$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots$	$=$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

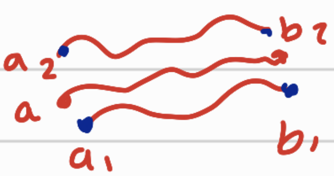
وحدانية التمثيل

$$f(x) = \sum_{n} b_n x^n = b_1 x + b_2 x^2$$

$$f(x) = \sum_{n} c_n x^n = c_1 x + c_2 x^2$$

$$\boxed{c_n = b_n}$$

$$c_0, c_1, c_2 \dots = b_0, b_1, b_2$$



(a_2, b_2)

(a_1, b_1) لو وجد فتره تقارب مشتركه

$\min(a_2 b_2)$ و $\max(a_1, b_1)$ (a, b) بين الفترتين

المثال لدينا الدالة $f(x)$ أثبت ان لها تمثيلين

متسلسلات القوى $b_0 = c_0$

$$f(x) = \sum b_n x^n \qquad f(x) = \sum c_n x^n$$

$$f(0) = b_0 x^0 = c_0 x^0 = b_0 = c_0$$

$$f'(x) = \sum_{n=0} b_n (n) x^{n-1}$$

$$= 0 + b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 \dots$$

$$f'(x) = \sum c_n (n) x^{n-1}$$

$$= 0 + c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 \dots$$

$$f'(0) = b_1 = c_1$$

$$b_1 = c_1$$

$b_0 = c_0$

$b_1 = c_1$

بتكرار الاشتقاق سنحصل على نفس النتيجة

$b_2 = c_2$

$\vdots \qquad \vdots$

$b_n = c_2$ هذا ما يثبت وحدانيه الدالة

* طريقة Frobenius في حل المعادلات التفاضلية

(معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية وحلها يكون مجموع خطي للحلين

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

خطوات الحل لطريقة فروبنيوس

① تحليل المعادلة

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0$$

② افتراض الحل

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{k+n}$$

$a_0 \neq 0$ نقطة تفرد $= x_0$

③ حساب المشتقات وتعويضها في المعادلة

④ توحيد الحدود وتجميع الحدود المتشابهة

⑤ حل معادلة الأس الأصغر لحساب indicial eq مقدار k

⑥ استخدام المعادلة التكرارية للحصول على قيم a_n وتشكيل منها الحل العام

مثال حل المعادله التفاضليه التاليه

$$y'' + w^2 y = 0$$

معادله الحركه التوافقيه البسيطه حول $x_0 = 0$

② افتراض الحل

$$y = \sum_{n=0} a_n x^{n+k}$$

$$y' = \sum_{n=0} a_n (n+k) x^{n+k-1}$$ ③

$$y'' = \sum_{n=0} a_n (n+k)(n+k-1) x^{n+k-2}$$

نعوض في المعادلة

$$y'' + w^2 y = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+k)(n+k-1) x^{n+k-2} + w^2 \sum_{n=0} a_n x^{n+k} = 0$$

$$a_0 (k)(k-1) x^{k-2} + a_1 (1+k)(k) x^{k-1} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} a_n (n+k)(n+k-1) x^{n+k-2} + w^2 \sum_{n=0} a_n x^{n+k} = 0$$

$n+2$ $\quad n+2 \quad n+2 \quad n+2$

$n+2 = 2$

$n = 0$

$$a_0 k(k-1) x^{k-2} + a_1 (k+1) k x^{k-1} + \sum_{n=0} a_{n+2} (n+2+k)(n+k+1) x^{n+k}$$

$$+ \omega^2 \sum_{n=0} a_n x^{n+k}$$

$$\underbrace{a_0 k(k-1)}_{0} x^{k-2} + \underbrace{a_1 (k+1) k}_{0} x^{k-1} + \sum \Big(\underbrace{a_{n+2} (n+k+2)(n+k+1) + \omega^2 a_n}_{0} \Big) x^{n+k} = 0$$

indicial eq (4)

$$a_0 (k)(k-1) = 0 \qquad a_0 \neq 0$$

$$k(k-1) = \begin{cases} k = 0 \\ k = 1 \end{cases}$$

$$0 = a_1 (k+1) k \begin{cases} k = 0 & a_1 \text{ arbitrary} \\ k = 1 & a_1 = 0 \end{cases}$$

$$a_{n+2} (n+k+2)(n+k+1) + a_n \omega^2 = 0$$

$$\boxed{a_{n+2} = \frac{-\omega^2}{(n+k+2)(n+k+1)} a_n}$$

Recurrence relation　　رابطه بازگشتی

عرفنا سابقا ان قيمة k $\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

$\boxed{\text{في حالة } k=0}$

$$\boxed{a_{j+2} = \frac{-\omega^2}{(j+2)(j+1)} a_j}$$

نبدأ من a_0 $\quad j=0$

$$a_2 = \frac{-\omega^2}{(2)(1)} a_0 = \frac{-\omega^2}{2 \cdot 1} a_0$$

$j=1 \quad a_1 \quad \not\propto$

$$a_3 = \frac{-\omega^2}{3 \cdot 2} a_1 = 0$$

$a_3 \quad \propto$

$$a_5 = \frac{-\omega^2}{5 \cdot 4} a_3 = 0$$

$a_4 \cdot$

$$a_6 = \frac{-\omega^2}{5 \cdot 6} a_4$$

قيمة $a_1 = 0$ نعوضها في الحدود الفردية

$$a_{2n+1} = a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = 0$$

$$a_{\substack{2n\\ \text{even}}} \Rightarrow a_2 = \frac{-w^2}{2\cdot 1} a_0 = \frac{-w^2}{2!} a_0$$

$$a_4 = \frac{-w^2}{4\cdot 3}\left(\frac{-w^2}{2\cdot 1}\right) a_0 = \frac{w^4}{4!} a_0$$

$$a_6 = \frac{-w^2}{5\cdot 6}\cdot \frac{w^4}{4!} a_0 = \frac{-w^6}{6!} a_0$$

الحد العام للحدود الزوجية

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{w^{2n}}{(2n)!} a_0$$

$$a_{2n+1} = 0$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \, w^{2n}}{(2n)!} a_0$$

$$y = \sum_{n=0} a_{2n} x^{2n}$$

$$y = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n w^{2n}}{2n!} a_0 \, x^{2n}$$

$$y = a_0 \sum \frac{(-1)^n (wx)^{2n}}{2!}$$

الحل الاول
في حالة $k=0$

$$\boxed{y_1 = a_0 \cos \omega x}$$

$$\boxed{k=1 \quad \text{الحالة الثانية}}$$

$$\boxed{a_{n+2} = -\frac{\omega^2}{(n+k+2)(n+k+1)} a_n}$$

$$a_{j+2} = \frac{-\omega^2}{(n+3)(n+2)} a_j$$

$j=0$

$$a_2 = \frac{-\omega^2}{3!} a_0$$

$j=1$

$$a_3 = \frac{-\omega^2}{4.3} a_1 = 0$$

$j=2$

$$a_4 = \frac{\omega^2}{4.5} a_2 = \frac{\omega^4}{5!} a_0$$

$j=3$

$$a_5 = 0$$

$j=4$

$$a_6 = -\frac{\omega^6}{7!} a_0$$

$$a_{2n+1} = 0$$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n+1)!} a_0$$

$$y = \sum a_n x^{k+n}$$

$$= \sum a_n x^{n+1}$$

$$\sum a_{2n} x^{2n+1}$$

$$y = \sum \frac{(-1)^n (\omega)^{2n}}{(2n+1)!} a_0 \, x^{2n+1}$$

$k=1$

اكل
اشي

$$y = \frac{a_0}{\omega} \sum \frac{(-1)^n (\omega x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\boxed{y_2 = \frac{a_0}{\omega} \sin \omega x}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{k+n}$$

x_0 هي نقطه تفرد

في حال $x_0 = 0$

$$y = \sum_{n=0} a_n x^{k+n}$$

معادله الحركه التوافقيه البسيطه

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

$y_1 = a_0 \cos \omega t$ $\quad$ $y_2 = \frac{a_0}{\omega} \sin \omega t$

الحلين مستقلين خطياً

$$y_1 \neq a y_2 + b$$

اذا y_1 و y_2 نعتبرات مستقلان خطياً

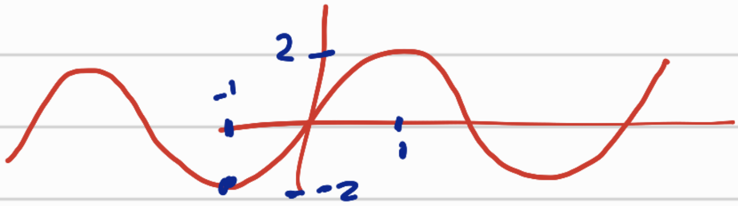
(اي لا يربط بينهما معادله خطيه)

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

في حاله الاستقلال الخطي

$c_1 = c_2 = 0$ $\quad$ $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$

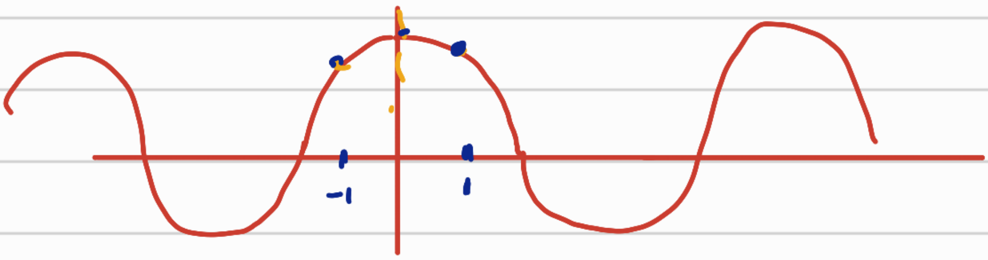
$\sin \omega t$



(حل غير متماثل) anti symmetric

$$f(-x) = -f(x)$$

$\cos \omega t$



حل متماثل symmetric

$$f(-x) = f(x)$$

في حالة الحركة التوافقية البسيطة يختفي حد الثابت
وعلية تقسيم ذلك في المعادلات التفاضلية

متماثل $\cos x$ ✗

غير متماثل $\sin$ ✓

$$\boxed{y = \frac{a_0}{\omega} \sin \omega t}$$

$$\hat{D}(x) = \frac{d^2}{dx^2} + P(x)\frac{d}{dx} + Q(x)$$

متماثل

$$\hat{D}(x) = \hat{D}(-x)$$

غير متماثل

$$\hat{D}(x) = -\hat{D}(-x)$$

$$y = y_a + y_s$$

يكتب الحل العام في حال وجود حد متناظر ، حد
غير متناظر

$$y = \frac{1}{2}\left[y(x)+y(-x)\right] + \frac{1}{2}\left[y(x)-y(-x)\right]$$

$$\cancel{\hat{D} y} = \frac{1}{2}\left[\cancel{\hat{D}(x)} y + \hat{D}(-x) y\right] + \frac{1}{2}\left[\cancel{\hat{D}(x) y} - \hat{D}(-x) y\right]$$

$$\frac{1}{2}\hat{D}(-x) y - \frac{1}{2} D(-x) y = 0$$

شروط استخدام طريقة فروبنيوس

① الحلول تحقق المعادلة

② متسلسلات متقاربة.

$$x^0 + x + x^2 + x^3 - - - - - \infty$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots \ldots \ldots$$ متقاربة

محدودية حل المسلسلات بواسطة فروبينوس

Bessel's   * معادلة بسل

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$$ حول $x_0 = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k}$$

$$y' = \sum_{n=0} a_n (n+k)\, x^{n+k-1}$$

$$y'' = \sum a_n (n+k)(n+k-1)\, x^{n+k-2}$$

نعوض في المعادلة

$$x^2y'' \quad + xy' \quad + (x^2 - m^2)y = 0$$

$$= \sum a_n (n+k)(n+k-1) x^{n+k} + \sum a_n (n+k) x^{n+k} + \sum a_n x^{n+k+2}$$

$$- m^2 \sum a_n x^{n+k}$$

$$= \sum_{n=0} a_n \left[(n+k)(n+k-1) + (n+k) - m^2\right] x^{n+k} + \sum a_n x^{k+n+2}$$

$$a_0[k(k-1)+k-m^2]\,x^k + [a_1\,((1+k)(k)+(1+k)-m^2]\,x^{k+1}$$

$$+\sum_{n=2} a_n\,[(n+k)(n+k-1)+(n+k)-m^2]\,x^{n+k}$$

$$(n+k)(n+k-\cancel{1}+\cancel{1})$$

$$+\sum_{n=0} a_n\,x^{k+n+2}$$

$$(k+1)^2$$

$$k^2+2k+1$$

$$a_0[k^2-\cancel{k}+\cancel{k}-m^2]\,x^k+[a_1(\underbrace{k+k^2+1+k}-m^2)\,x^{k+1}$$

$$+\sum_{n=2} a_n[(n+k)^2-m^2] + \sum_{n=0} a_n\,x^{k+n+2}$$

$$a_0(k^2-m^2)\,x^k + a_1((k+1)^2-m^2)\,x^{k+1}$$

$$+\sum_{\substack{n=2\\ n+2\\ n=0}} a_{\underset{n+2}{n}}\,[(\overset{n+2}{n}+k)^2-m^2]\,x^{\overset{n+2}{n+k}} + \sum_{n=0} a_n\,x^{n+k+2}$$

$$n=j$$

$$n=j+2$$

$$a_0(k^2-m^2)\,x^k+a_1((k+1)^2-m^2)\,x^{k+1}+\sum_{j=0} a_{j+2}\,[(j+2+k)^2-m^2]\,x^{j+k+2}$$

$$+a_j\sum_{j=0} x^{j+k+2} = 0$$

الحلول

$$a_0(k^2-m^2)=0 \qquad k^2-m^2=0$$

$$\boxed{k=\pm m}$$

الحد الثاني

$$a_1\left[(k+1)^2-m^2\right]=0$$

$a_1=0$

$(k+1)^2=m^2$ مرفوض

$k+1=\pm m$

$$\boxed{a_1=0}$$

$$\sum_{j=0}\left[a_{j+2}\left[(k+j+2)^2-m^2\right]+a_j\right]x^{j+k}=0$$

$$a_{j+2}=\frac{-a_j}{(k+j+2)^2-m^2}$$

معادلة تكرارية

$$\boxed{a_{j+2}=\frac{-a_j}{(k+j+2+m)(k+j+2-m)}}$$

$a_0=\pm m$ $\quad$ $a_1=0$

$\boxed{m=k \quad \text{الكلام دى}}$

$$\boxed{a_{j+2}=\frac{-a_j}{(2m+j+2)(j+2)}}$$

$m=k$

$j=0$ $\quad a_2 = \dfrac{-a_0}{2(2m+2)} = \dfrac{-a_0}{4(m+1)}$

$j=1$ $\quad a_3 = \dfrac{a_1}{(2m+3)(3)} = 0$

$j=2$ $\quad a_4 = \dfrac{-a_2}{4(2m+4)} = \dfrac{1}{4.2(m+2)} \dfrac{a_0}{4(m+1)}$

$$a_4 = \frac{+a_0}{2.4.4(m+1)(m+2)}$$

$j=3$

$$a_5 = 0$$

$j=4$ $\quad a_6 = \dfrac{a_4}{6(2m+6)} =$

$$\underset{2\times 3}{a_6} = \frac{-a_0}{2.4.4.6.2(m+1)(m+2)(m+3)}$$

$$a_6 = \frac{a_0}{\underline{2}^6 . \underset{\underset{3!}{6}}{6} (m+1)(m+2)m+3)}$$

فردي   زوجي

$$a_{2n+1} = 0$$

$$\boxed{a_{2n} = \frac{(-1)^n \, m!}{2^{2n}(n!)(m+3)} a_0}$$

نعوض a_n لحساب y

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^{n+m}$$

$$y = x^m \sum_{n=0} a_n x^n$$

$$= x^x \Big[\underbrace{\cancel{\sum a_{2n+1} x^{2n+1}}}_{\text{zero}} + \sum a_{2n} x^{2n} \Big]$$

الحل (1)

$$\boxed{y_{k=m} = a_0 \sum \frac{(-1)^n \, m!}{2^{2n}\, n!\,(m+n)!} x^{2n+m}}$$

الحالة الثانية

$$k = -m$$

علاقة تكرارية

$$\boxed{a_{j+2} = \frac{-a_j}{(k+j+2+m)(k+j+2-m)}}$$

$$a_{j+2} = \frac{-a_j}{(j+2)(j+2-2m)}$$

سلسلة متباعدة

في هذه الحالات ممكن نكون المقام صفر

$$j+2 = 2-2m \Rightarrow$$ المقام صفر

يرفض الحل لأنه يمثل سلسلة متباعدة لها أصفار مقام

$$y = a_0 \sum \frac{(-1)^n \, m! \, x^{2n+m}}{2^{2n}(n!)(m+n)!} \qquad \frac{2^m}{2^m}$$

$k=m$

$$\boxed{y = a_0 2^m m! \sum \frac{(-1)^n}{n!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}}$$

علينا ايجاد حل آخر بنعوض $m = -m$

Fuchs Theorem نظرية فوكس

حركة توافقية البسيطة ← $\cos\omega t$ ، $\sin\omega t$ نقاط تفرد منتظمة

معادلة بيسل ← حل نقاط تفرد منتظمة

* كل المعادلات بطريقة فروبينوس يكون حول نقطة عادية او نقطة تفرد منتظمة (ليس لنقطة غير منتظمة)

تنص نظرية فوكس: طريقة متسلسلات القوى (فروبينوس) تعطي حل واحد على الاقل حول نقطة عادية او على الاسوء نقطة تفرد منتظمة

✓ يفيد هذا الكلام عند حل المعادلة
← نبحث عن نقاط التفرد المنتظمة
← يمكن استخدام طريقة فروبينوس بشكل مباشر

$\boxed{\text{تمارين صفحة } 22}$

① $y'' - \frac{6}{x^2} y = 0$

اثبت ان اكل هو x^3 x^{-2} عن نقطة التفرد $X=0$

* نحسب نقاط التفرد

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

$P(x) = 0$ $\qquad$ $Q(x) = -\frac{6}{x^2}$

$x^2 = 0$ $\qquad$ $\boxed{x=0}$ نقطة تفرد

* نوع نقاط التفرد

$$\lim_{x\to 0} (x - x_0)P(x) = \lim_{x\to 0} x P(x) = 0$$ محددة

$$\lim_{x\to 0} (x - x_0)^2 Q(x) = \lim_{x\to 0} x^2\left(-\frac{6}{x^2}\right) = -6$$ محددة

$x=0$ هي نقطة تفرد منتظمة

* استخدام طريقة فروبنيوس لحل المعادلة

$$y'' - \frac{6}{x^2}y = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n}$$

$$y' = \sum_{n=0} a_n (k+n) x^{k+n-1}$$

$$y'' = \sum a_n (k+n)(k+n-1) x^{k+n-2}$$

$$\sum a_n (k+n)(k+n-1)\, x^{k+n-2} - 6 \sum a_n\, x^{k+n-2} = 0$$

$$\sum a_n \left[\underline{(k+n)(k+n-1) - 6} \right] x^{k+n-2} = 0$$

$$a_n (k+n)(k+n-1) - 6 = 0$$

الحد الاول

$n=0$

$$a_0 \left[(k)(k-1) - 6 \right] = 0$$

$a_0 \neq 0$

$$k(k-1) - 6 = 0$$

$$k^2 - k - 6 = 0$$

$$(k+2)(k-3) = 0$$

$k = -2$ $\quad\quad$ $k = 3$

في حالة $k=-2$

$$a_n \left[(k+n)(k+n-1) - 6 \right] = 0$$

$$a_n \left[(n-2)(n-3) - 6 \right] =$$

$n=0$ $\quad a_0 (0) = 0 \quad a_0 \neq 0$

$n=1$ $\quad a_1 \left[(-1)(-2) - 6 \right] = 0$

$$(a_1) - 4 = 0$$

$$a_1 = 0$$
$$a_2 = 0$$
$$a_3 = 0$$

$$y_1 = \sum a_n x^{n+k}$$
$$= \boxed{a_0 x^{-2}} = c x^{-2}$$

$k = 3$ في حالة

$$a_n\left[(n+3)(2+k) - 6\right] x^{n+3} = 0$$

$n = 0$

$$a_0 [6 - 6] = 0 \qquad a_0 \neq 0$$

$$a_1 [(4)(3) - 6] = 0$$

$$a_1 = 0$$
$$a_2 = 0$$
$$a_3 = 0$$

$$y = \sum a_n x^{n+k}$$
$$= a_0 x^3 = c x^3$$

$$y_1 = c x^{-2} \qquad\qquad y_2 = c x^3$$

تمارين صفحة 22 ②

② اثبت ان المعادلة

$$y'' - \frac{6}{x^3} y = 0$$

لها نقطة تفرد غير منتظمة $x = 0$ ولا نحصل
على حل مباشر حول $x = 0$

$$y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0$$

$P = 0$ $\qquad$ $Q(x) = -\frac{6}{x^3}$

$x^3 = 0$ $\qquad$ $x = 0$

هناك نقطة تفرد عند $x = 0$

محددة $\lim_{x \to x_0} (x - x_0) P(x) = 0$

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 Q(x) = \cancel{x^2} \frac{6}{\cancel{x^3}} = \frac{6}{x}$$

في متباعده ∞ عندما x تقترب 0 من

$x = 0$ هي نقطة تفرد غير منتظمة
لذلك لا يمكنه الحصول على حل مباشر باستخدام متسلسلات القوى

تمارين صفحة 22

3) اثبت ان المعادلة

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{a^2}{x^2} y = 0$$

لها نقطة تفرد منتظمة عندما $x=0$ وحل المعادلة:

$$y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0$$

$$P(x) = \frac{1}{x} \qquad Q(x) = \frac{-a^2}{x^2}$$

$x=0$ $\qquad$ $x^2=0$ $\quad$ $x=0$

نقطة تفرد عندما $x=0$

$$\lim_{x \to x_0} (x-x_0) P(x) = \lim_{x \to 0} \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} = 1$$

محددة

$$\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^2 Q(x) = \lim_{x \to 0} \cancel{x^2} \frac{-a^2}{\cancel{x^2}} = -a^2$$

هي نقطة تفرد منتظمة

$$y = \sum a_n x^{n+k}$$ *

$$y' = \sum a_n (n+k) x^{n+k-1}$$

$$y'' = \sum a_n (n+k)(n+k-1) x^{n+k-2}$$

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{a^2}{x^2} y = 0$$

$$\sum a_n (n+k)(n+k-1) x^{n+k-2} + \sum a_n (n+k) x^{n+k-2} - a^2 \sum a_n x^{n+k-2} = 0$$

$$\sum a_n \left[(n+k)(n+k-1) + (n+k) - a^2\right] x^{n+k-2} = 0$$

اكر الاول . $n=0$

$$a_0 \left[(0+k)(0+k-1) + (0+k) - a^2\right] = 0$$

$a_0 \neq 0$

$$k(k-1) + k - a^2$$

$$k^2 - \cancel{k} + \cancel{k} - a^2 = 0$$

$$k^2 - a^2 = 0$$

$$k$$

$k = a$ $\qquad\qquad$ $k = -a$

$$\boxed{k = a}$$

$$\sum a_n \left((a+n)(a+n-1) + (a+n) - a^2 \right) = 0$$

$a_n \neq 0$

$$\cancel{a_1}^{\,0} \left[\cancel{(a+1)(a)} - (a+1) - a^2 \right]_{\neq 0} = 0$$

a_1, a_2, a_3, a_n > Zero

كلها تكون

$$\boxed{y_1 = a_0 x^{a}}$$

الحالة ثانية

$k = -a$

$$a_n \left[(-a+n)(-a+n-1) + (-a+n) - a^2 \right] = 0$$

$$a_n \left[(-a+n)(-a+n \cancel{-1} \cancel{+1}) - a^2 \right] = 0$$

$$a_n \left[(-a+n)(-a+n) - a^2 \right] = 0$$

$$a_n \left[\cancel{+a^2} - an - an + n^2 \cancel{-a^2} \right] = 0$$

$$a_n \left[n(-2a+n) \right] = 0$$

$a_0 [0] = 0$ $\qquad$ $a_0 \neq 0$

$a_1 (-2a+1) = 0$ $\qquad$ $a_1 = 0$

n موجبة

$a_2 = 0$

$$\boxed{y_2 = a_0 x^{-a}}$$

تلخيص نتائج حل المعادلات

نستخدم متسلسلات القوى لحل المعادلات التفاضلية الاعتيادية المتجانسة من الرتبة الثانية تحل لها حلين

عند حل معادلة (الحد الصفري) indicial تعطي قيمة الجذور k

① جذرين متساويين ← حل واحد

② جذرين مختلفين بصيغة صحيحة موجبة

او مختلفين لهم غير صحيح ينتج حلين

مستقلين خطياً

$y_1 + a y_2 = 0$.

③ جذرين احدهما موجب والاخر سالب

الموجب يعطي حل والسالب لا يعطي حل

للتعرف على الاستقلال الخطي للحلول

$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$

نستخدم مصفوفة Wornskian

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$$

اذا كانت $|W| \neq 0$ الحلين مستقلان $c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$

مثال في معادله المتذبذب التوافقي البسيط

$y_1 = \sin \omega x \qquad y_2 = \sin \omega x$

اثبت ان الحلين مستقلين

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega \sin\omega t & +\omega\cos\omega t \end{vmatrix}$$

$$W = \omega\cos^2\omega t + \omega \sin^2\omega t = \omega \neq 0$$

الحلين مستقلين

طرق حل المعادلات الخطية لمتغير n بالمصفوفات

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$AX = 0 \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ a_{31} & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

0 حل بديهي

حلول $x = 0$

اذا كانت الحلول مستقلة

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 = 0$$

خصي

اشتقاق المشتقة يجب ان تكون

$$a_1 y_1' + a_2 y_2' = 0$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$ شرط حتى تكون الحلول مستقلة

$$a_1 = a_2 = 0$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

$$y'' = -P(x)y' - Q(x)y$$

Wornskian

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$W' = y_1 y_2'' + \cancel{y_1' y_2'} - y_2 y_1'' - \cancel{y_2' y_1'}$$

$$W' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

$$W' = y_1(-P(x)y_2' - Q(x)y_2) + y_2(P(x)y_1' + Q(x)y_1)$$

$$= -P(x)\, y_1 y_2' - \cancel{Q(x)\, y_2 y_1} + P(x)\, y_2 y_1' + \cancel{Q(x)\, y_2 y_1}$$

$$W' = -P(x)\,\big(\underbrace{-y_2 y_1' + y_1 y_2'}_{W}\big)$$

محدده W

$\neq 0$

$$W' = -P(x)\, W$$

هذه المعادلة:

$$y'' + Q(x)\,y = 0$$

تشبه معادله الحركه التوافقيه
[illegible]

$y'' + w^2 y = 0$

$y'' + k^2 y = 0$

$W \neq 0 = C$ $\qquad$ $W' = 0$

حل المعادلة:

$$W' = -P(x)\, W$$

$$\frac{dw}{dx} = -P(x)\, w$$

$$\int_a^x \frac{dw}{w} = \int_a^x -P(x)\, dx$$

$$\ln W(x)\Big]_a^x = \int_a^x -P(x)\, dx$$

$$\ln W(x) - \ln W(a) = \int_a^x -P(x)\,dx$$

$$\xrightarrow{e} \quad \cancel{e^{\ln}} \frac{W(x)}{W(a)} = e^{\int_a^x -P(x)\,dx}$$

$$W(x) = W(a)\, e^{\int_a^x -P(x)\,dx}$$

$$y_1^2(x)\left(\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2(x)}\right) = W(a)\, e^{\int -P(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) y_1^2(x) = W(a)\, e^{\int -P(x)\,dx}$$

$$\int \frac{d}{dx} \frac{y_2}{y_1} = \int \frac{W(a)}{y_1^2(x)}\, e^{\int -P(x)\,dx}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{W(a)}{y_1^2(x)}\, e^{\int -P(x)\,dx}$$

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{\cancel{a}}^{x} \frac{\cancel{W}(a)}{y_1^2(x)}\, e^{\int -P(x)\,dx}$$

$$\boxed{y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{\int -P(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx}$$

معادله مهمة نستخدم في حال اعطاني الحل

الاول y_1 وطلب ان نجد الحل الثاني y_2

صفحة 28

مثال اذا علمت ان الحل الاول $y_1 = \cos wt$

احسب الحل الثاني (معادله حركه توافقيه بسيطه)

$\boxed{P(x)=0}$ $\quad y'' + w^2 y = 0$

$$y_2 = y_1 \int \frac{\cancel{e^{\int -P(x)\,dx}}}{y_1^2}\,dx$$

$$= \cos wx \int \frac{dx}{\cos^2 wx}$$

$$= \cos wx \int \sec^2 wx$$

$$= \cos wx \; \frac{\tan wx}{w}$$

$$= \frac{1}{\omega} \cancel{\cos \omega x} \frac{\sin \omega x}{\cancel{\cos \omega x}}$$

$$y_2 = \frac{1}{\omega} \sin \omega x$$

Sturm-Liouville theory — نظرية ستورم - ليوفيل

$$\hat{A}^{\dagger} = (A^T)^* = \hat{A}$$

$$Z = 3 + 5i$$
$$Z^* = 3 - 5i$$
مرافق لها

مؤثر هيرميتي (ذاتي التجاور)

self adjoint

$$Z^* = Z$$
self conjugate
حقيقي

تكون القيمه مميزه $A^{\dagger} = A$

$$\hat{D}\left(f(x)\right) = k\, f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sin x\right) = \cos x$$ ليست داله ذات قيمه مميزه

eigen function

$$\frac{d^2}{dx^2}(\sin x) = -\sin x$$ (-) eigen value

تمرين حالة، معادلة التفاضلية

$$y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = 0$$

$$f_2(x)\, y'' + f_1(x)\, y' + f_0(x)\, y = \underline{\lambda y} \quad \checkmark$$

$$\hat{L}(x)\, y = \left[f_2(x) \frac{d^2}{dx} + f_1(x) \frac{d}{dx} + f_0(x) \right] y = \lambda y$$

$$L(x)\, y = \lambda y$$

معادلة قيمة ذاتية

eigen value equation

eigen value

امثلة

معادلة بيسل

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - m^2) y = 0$$

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = m^2 y$$

$$\hat{L}(x) = \underbrace{x^2}_{f_2} \frac{d^2}{dx^2} + \underbrace{x}_{f_1} \frac{d}{dx} + \underbrace{x^2}_{f_0}$$

$$\hat{L}(x)\, y = m^2 y$$

دالة قيمة مميزة

قيمة مميزة

معادله ليجندر

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' = -n(n+1)y$$

$$f_2 = (1-x^2) \qquad f_1 = -2x \qquad f_0 = 0$$

$$\hat{L}(x) = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}$$

$$\underbrace{\hat{L}(x)}_{\text{دالة قيمة مميزة}}\, y = \underbrace{-n(n+1)}_{\text{قيمة مميزة}}\, y$$

معادلات تفاضلية هيرميتية

$$f_2 y'' + f_1 y' + f_0 y = \lambda y$$

تكون المعادلة هيرميتية اذا تحقق الشرط التالي

$$f_2' = f_1$$

مثال: هل معادلة بسل ومعادلة لجندر تعتبر هرميتية

معادله بيسل

$f_1 = x \qquad f_2 = x^2$

$f_2' = 2x \neq x$

غير هرمنيه

معادله لجندر

$f_1 = -2x \qquad f_2 = (1-x^2)$

$f_2' = -2x = f_1$

هرمنيه

الصيغه العامه للمعادله الهرمتيه

$$\underbrace{f_2 y'' + f_2' y'} + f_0 y = \lambda y$$

$$(f_2 y')' + f_0 y = \lambda y$$

حل اول y_1 — حل ثاني y_2

مستقلين خطياً

$$\langle y_1 | y_2 \rangle = \int y_1^* y_2 \, dx$$

تحويلات خطيه لفضاء متجه

$$(f_2 y')' + f_0 y = \lambda y$$

$$\mathcal{L}(x)\, y_1 = \lambda y_1 = g_1(x)$$

$$\mathcal{L}(x)\, y_2 = \lambda y_2 = g_2(x)$$

$$\langle y_1 | g_2 \rangle = \langle y_1 | \mathcal{L}(y_2) \rangle$$

$$\langle y_1 | \hat{\mathcal{L}} y_2 \rangle = \int y_1^* \hat{\mathcal{L}} y_2$$

$$= \int y_1^* \left[(f_2 y_1')' + f_0 y_2 \right]$$

$$= \int y_1^* (f_2 y_1')' + \int y_1^* f_0 y_2$$

تكامل بالاجزاء

$$u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= y_1^* (f_2 y_1') - \int y_1^{*\prime} f_1 y_1'$$

$$= y_1^* f_2 y_2' \Big]_a^b - \int \underbrace{y_1^{*\prime} f_2 y_1'} + \int y_1^* f_0 y_2$$

$$\underset{u}{f_2 y_1^{*\prime}} \qquad \underset{dv}{y_2'}$$

تكامل بالاجزاء
مره ثانيه

$$f_2 y_1^* y_2 - \int y_2 (f_2 y_1^*)'$$

$$\langle y_1|\alpha y_2\rangle = y_1^* f_2 y_2' \Big]_a^b - f_2 y_1^{*\prime} y_2 \Big]_a^b + \int y_2 (f_2 y_1^{*\prime})' + f_0 y_1^* y_2$$

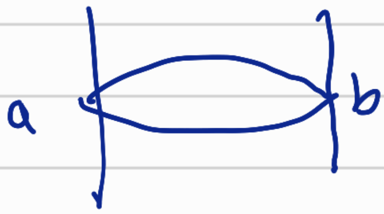
$$y_2 \, \alpha \, y_1^*$$

$$\langle \hat{L} y_1 | y_2 \rangle$$

$$\langle y_1 | \alpha(y_2) \rangle = y_1^* f_2 y_2' \Big]_a^b - f_2 y_1^{*\prime} y_2 \Big]_a^b + \langle \alpha y_1 | y_2 \rangle$$

$$\langle y_1 | \alpha y_2 \rangle - \langle \alpha y_1 | y_2 \rangle = \left[y_1^* f_2 y_2' - y_2 f_2 y_1^{*\prime} \right]_a^b$$

الحل العام لمعادله ستورم ليوفيل



① اذا تلاشت y_1 و y_2 عند النقاط الحدية (a,b)

Dirichelt boundary

حدود ديرشلت

② اذا تلاشت y_1' و y_2' عند النقاط الحدية

Neumunn boundary condition

③ علينا ان نثبت أحد الحلين من الطرف الاخر

$$y_1^* f_2 y_2' = y_2 f_2 y_1^*$$

بحيث هذه الحالة في الاشعة الدورية

$$\langle y_1 | L y_2 \rangle = \langle L y_1 | y \rangle$$

$$\langle y_1 | \hat{L}(x) y_2 \rangle - \langle \hat{L}(x) y_1 | y_2 \rangle = (\lambda - \lambda_1) \langle y_1 | y_2 \rangle$$

$$\sum a_n \int y_m^* y_n \begin{cases} \to 0 & n \neq m \\ \to 1 & n = m \end{cases}$$

$$\delta_{nm} = \begin{cases} n = m & 1 \\ n \neq m & 0 \end{cases}$$

المؤثر الهرميتي له دوال مميزة $y_1, y_2 ..$

1- متعامدة
2- مستقلة خطية
3. كاملة

$$f(x) = \sum a_n y_1$$

المعادلات التفاضلية غير الهرميتية

هرميتية ⟵ $f_2' = f_1$

الحل العام

$$\langle y_1 | \hat{\alpha} y_2 \rangle - \langle \hat{\alpha} y_1 | y_2 \rangle = (\lambda_2 - \lambda_1^*) \langle y_1 | y_2 \rangle$$

المعادلة غير الهرميتية

$$f_2' \neq f_1$$

* أولاً نضرب المعادلة بـ weight function $W(x)$ لتحول المعادلة من غير هرميتية الى هرميتية

$$W(x) = \frac{1}{f_2} e^{\int \frac{f_1}{f_2} dx}$$

* ثانياً نطبق الحل العام

$$\langle y_1 | \hat{\alpha} y_2 \rangle - \langle \hat{\alpha} y_1 | y_2 \rangle = \left[W f_2 (y_1^* y_2' - y_1^{*\prime} y_2) \right]_a^b$$

$$\int y_m^* y_1 W \, dx = \delta_{mn} \begin{cases} \to 1 & n = m \\ \to 0 & n \neq m \end{cases}$$

$\boxed{w}$ اثبات داله

$$f_2 y'' + f_1 y' + f_0 y = \lambda y$$

بتحویلها ای همرتبه نخواهد w

$$\underbrace{w f_2}_{\tilde{f}_2} y'' + \underbrace{w f_1}_{\tilde{f}_2} y' + \underbrace{f_0 w}_{\tilde{f}_0} y = \lambda w$$

$$\tilde{f}_2{}' = \tilde{f}_1$$

$$(w f_2)' = w f_1$$

$$w' f_2 + w f_2' = w f_1$$

$$w' f_2 = w f_1 - w f_2'$$

$$w' = w \left(\frac{f_1 - f_2'}{f_2} \right)$$

$$\frac{dw}{dx} = w \left(\frac{f_1 - f_2'}{f_2} \right)$$

$$\int \frac{dw}{w} = \int \frac{f_1}{f_2} - \frac{f_2'}{f_2} \, dx$$

$$\ln w = \int \frac{f_1}{f_2}\,dx - \ln f_2$$

$\rightarrow e$

$$w = \frac{e^{\int \frac{f_1}{f_2}}}{f_2}$$

$$\boxed{w = \frac{1}{f}\, e^{\int \frac{f_1'}{f_2}}}$$

$$\langle y_1 | y_2 \rangle = \int y_1^{*}\, y_2\, w\, dx$$

$$\langle y_1 | \mathcal{L} y_2 \rangle - \langle \hat{\mathcal{L}} y_1 | y_2 \rangle = \left[w f_2 \left(y_1^{*} y_2' - y_1^{*\prime} y_2 \right) \right]$$

طريقة اخرى لتوصيف الضرب الداخلي

$$\langle y_1 | y_2 \rangle = \int \underbrace{\left(\sqrt{w}\, y_1 \right)^{*}}_{g_1} \underbrace{\left(\sqrt{w}\, y_2 \right)}_{g_2} dx$$

$$\langle y_1 | y_2 \rangle = \langle g_1 | g_2 \rangle$$

$$g = \sqrt{w}\, y \qquad\qquad y = \frac{g}{\sqrt{w}}$$

نعوض g في المعادلة التفاضلية

$$f_2 y'' + f_1 y' + f_0 y = \lambda y$$

$$f_2\left(\frac{g}{\sqrt{w}}\right)'' + f_1\left(\frac{g}{\sqrt{w}}\right)' + f_0 \frac{g}{\sqrt{w}} + \lambda \frac{g}{\sqrt{w}}$$

$f_2' = f_1$ بعد تطبيق المشتقة الثانية ونعوض

$$f_2\, g'' + \left(f_1 - \frac{w'}{w} f_2\right) g'$$

$$+\left(\left[\frac{1}{4}\left(\frac{w'}{w}\right)^4 + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{w'}{w}\right)\right] f_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{w'}{w}\right) f + f_0\right) g = \lambda g$$

$$\tilde{\tilde{f}}_2\, g'' + \tilde{\tilde{f}}_1\, g' + \tilde{\tilde{f}}_0\, g = \lambda g$$

مثال

$$y'' - 2x\, y' + 2ny = 0$$

هل هذه المعادلة هيرميتية و عكس تحويلها الى هيرميتية

$f_2 = 1 \qquad f_2' = 0 \qquad f_1 = -2x$

$$f_2' \neq f_1$$

$$0 \neq -2x$$

ليست معادله هيرميته

لتحويل المعادله الى هيرميتيه نحسب W

$$W = \frac{1}{f_2} e^{\int \frac{f_1}{f_2} dx}$$

$$W = \frac{1}{1} e^{\int \frac{-2x}{1} dx}$$

$$W = e^{\frac{-\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}} = e^{-x^2}$$

$$W = e^{-x^2}$$

نضرب جميع المعادله ب (W)

$$y'' e^{-x^2} - 2x e^{-x^2} y' + 2n e^{-x^2} y = 0$$

$$y = \frac{\psi}{\sqrt{w}} = \frac{\psi}{e^{-x^2/2}} = \psi e^{x^2/2}$$

$$y = e^{x^2/2}\,\psi(x)$$

$$y' = x e^{x^2/2}\psi + e^{x^2/2}\psi' = e^{x^2/2}(x\psi + \psi')$$

$$y'' = e^{x^2/2}\psi + x\left(x e^{x^2/2}\psi + e^{x^2/2}\psi'\right)$$

$$+ e^{x^2/2}\psi'' + x e^{x^2/2}\psi'$$

$$y'' = e^{x^2/2}\psi + x^2 e^{x^2/2}\psi + 2x e^{x^2/2}\psi' + e^{x^2/2}\psi''$$

$$= e^{x^2/2}\left(\psi + x^2\psi + 2x\psi' + \psi''\right)$$

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

$$(\psi + x^2\psi + 2x\psi' + \psi'')\cancel{e^{x^2/2}} - (2x^2\psi + 2x\psi')\cancel{e^{x^2/2}}$$

$$+ 2n\psi\,\cancel{e^{x^2/2}} = 0$$

$$\psi + x^2\psi + 2x\cancel{\psi'} + \psi'' - 2x^2\psi - 2x\cancel{\psi'}$$

$$+ 2n\psi = 0$$

$$\psi'' + (1 + x^2 - 2x^2 + 2n)\psi = 0$$

$$\psi'' + (2n + 1 - x^2)\psi = 0$$

هو تماما كمعادله اي معادله
الحركه التوافقيه البسيطه.