1.1 CLASSIFICATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS; THEIR ORIGIN AND APPLICATION

A. Differential Equations and Their Classification

DEFINITION DE

An equation involving derivatives of one or more dependent variables with respect to one or more independent variables is called a differential equation.*

المعادلة التفاضلية : معادلة تحتوي على مشتقات لمتغير تابع واحد او اكثر بالنسبه لمتغير مستقل واحد او اكثر

$x \quad y \quad \frac{dy}{dx} \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \frac{d^3y}{dx}$.

y: متغير تابع dependent varible DV

x: متغير مستقل Independent varible IV

$\frac{du}{dv}$ → DV : u

↘ IV : v

مشتقه اولى

$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dt} = 4$ → DV : y

→ IV : x, t

انواع المعادلات التفاضلية

ODE

PDF

DEFINITION ODE

A differential equation involving ordinary derivatives of one or more dependent variables with respect to a single independent variable is called an ordinary differential equation.

المعادلة التفاضليه الاعتياديه ODE

هي معادله تفاضليه تحتوي على مشتقات لمتغير تابع واحد او اكثر بالنسبه لمتغير مستقل واحد فقط

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

ODE

IV المتغير المستقل هو فقط

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dx}{dt} = 5$$

ODE

IV : t

مشتقات اعتياديه

$\frac{dy}{dx}$ $\frac{du}{dv}$ $\frac{dx}{dt}$

مشتقات جزئيه

$\frac{\partial y}{\partial x}$ $\frac{\partial u}{\partial v}$ $\frac{\partial x}{\partial t}$

DEFINITION PDE

A differential equation involving partial derivatives of one or more dependent variables with respect to more than one independent variable is called a partial differential equation.

معادلة تفاضليه جزئيه :- معادله تفاضليه تحوي على مشتقات لمتغير تابع او اكثر بالنسبه لـ اكثر من متغير مستقل واحد

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

المتغير التابع : u
المتغير المستقل :- x, y

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

المتغير التابع :- y
المتغير المستقل :- x, t

DEFINITION

The order *of the highest ordered derivative involved in a differential equation is called the* order *of the differential equation.*

الرتبه :- رتبه المعادلة التفاضليه هي اعلى مشتقة فيها

First order DE ⇒ اعلى مشتقه في المعادله هي مشتقه اولى

2nd order DE ⇒ اكبر مشتقه ثانيه

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} - 4x = 0$$ 2nd-order

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 - 4x = 0$$ 3rd-order

Example 1.1

For examples of differential equations we list the following:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t,$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Differential Equation	Type (ODE / PDE)	Order	Linear / Nonlinear	Dependent Variable (DV)	Independent Variable(s) (IV)
$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$	ODE	2	Nonlinear	y	x
$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t$	ODE	4	linear	x	t
$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$	PDE	1	linear	v	s, t
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$	PDE	2	linear	u	x, y, z

DEFINITION

A linear ordinary differential equation of order n, in the dependent variable y and the independent variable x, is an equation that is in, or can be expressed in, the form

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x),$$

DEFINITION

A nonlinear ordinary differential equation is an ordinary differential equation that is not linear.

حتى تكون المعادله التفاضليه خطيه يجب ان يتحقق الشرطان

① المتغير التابع y ومشتقاته يكون ان تكون في المعادله لكن بدون اسس (درجة اولى)

y ، $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$ ..... ---

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ $\sqrt{\frac{dy}{dx}}$ $\sqrt{y}$ $\sin y$ غير مسموح

① معاملات المتغير التابع (y) ومشتقاته تكون دوال للمتغير المستقل (x) او ثابت

$$\underline{x^2}\,y + \underline{2x}\,\frac{dy}{dx} + \underline{1}\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

معاملات

③ اذا لم يتحقق احد الشرطين السابقين تكون المعادلة

Nonlinear

$$\underline{\sin x}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) - \underline{\cos x}\left(\frac{dy}{dx}\right) = 2$$ linear

$$\underline{t^5}\left(\frac{d^4y}{dt^4}\right) - \underline{t^3}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + 6y = 0$$ linear

$$x\,\frac{d^3y}{dx^3} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$$ Nonlinear

▶ **Example 1.5**

The following ordinary differential equations are both linear. In each case y is the dependent variable. Observe that y and its various derivatives occur to the first degree only and that no products of y and/or any of its derivatives are present.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + x^2\frac{d^3y}{dx^3} + x^3\frac{dy}{dx} = xe^x. \tag{1.6}$$

* $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

① موجود y ، $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ بدون اس

② المعاملات ثوابت (1, 5, 6) وكلها لا تعتمد على y

تحقق الشرطين ← خطية

$$\frac{d^4y}{dx^4} + x^2\frac{d^3y}{dx^3} + x^3\frac{dy}{dx} = xe^x$$

① موجود $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$ ، $\frac{d^4y}{dx^4}$ بدون اس

② المعاملات 1 ، x^2 ، x^3 وهي لا تعتمد على x

تحقق الشرطين ← المعادلة linear

▶ **Example 1.6**

The following ordinary differential equations are all nonlinear:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right) + 6y^2 = 0, \quad \text{nonlinear} \rightarrow \text{power of } y \text{ is not 1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0, \rightarrow \text{power of } \frac{dy}{dx} \text{ is not 1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5y\frac{dy}{dx} + 6y = 0. \rightarrow$$ ✓ الشرط الأول تحقق $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{dy}{dx}$ ، y

الشرط الثاني لم يتحقق ضمن معامل $5y$ هذا لا يجوز